

## **Algorithmes approchés avec garanties de performance pour la décision sur domaine combinatoire**

Ce sujet de thèse relève de la théorie de la décision algorithmique et porte sur la conception d'algorithmes approchés avec garanties de performance pour la prise de décision en environnement complexe. Par complexe on entend ici d'une part le fait que l'espace des solutions admissibles est défini de manière implicite (par un système de contraintes ou un ensemble de propriétés structurelles à satisfaire) et inclut possiblement un grand nombre d'éléments du fait de sa structure combinatoire, et d'autre part que le modèle de décision qui définit la notion de préférence et d'optimalité est une fonction généralement non-linéaire des variables de décision pour pouvoir rendre compte de préférences sophistiquées.

Cette problématique apparaît dans de nombreux contextes décisionnels. En effet, que ce soit en décision multicritère et collective ou en décision dans l'incertain et dans le risque, l'expression des préférences nécessite souvent de recourir à des modèles de décision qui réalisent une agrégation non-linéaire des conséquences ou performances des solutions à comparer. Par exemple, en optimisation combinatoire multi-objectifs, on sait bien que l'utilisation d'agrégateurs linéaires ne permet pas d'explorer convenablement les solutions Pareto-optimales et qu'il faut utiliser des modèles non-linéaires pour atteindre les solutions non-supportées par optimisation. De même, en décision multi-agents, la recherche de solutions équitables nécessite de recourir à des fonctions dont l'optimisation vise à réduire les inégalités tout en produisant des solutions Pareto-optimales, ce qui n'est pas possible avec une fonction linéaire. Enfin, en décision dans l'incertain ou dans le risque, la modélisation de comportements averse à l'incertitude ou au risque nécessite également de recourir à des modèles non linéaires. La théorie de la décision a produit et justifié de nombreux modèles de décision (utilité espérée, fonctions d'utilités multi-attributs, intégrales non-additives, fonctions scalarisantes fondées sur une métrique), pour rendre compte de préférences dans ces différents contextes et optimiser des choix. Malheureusement, la richesse expressive des modèles complique la recherche de la solution optimale et le calcul d'une décision optimale sur domaine combinatoire revient généralement à résoudre un problème NP-difficile, même si quelques cas polynomiaux sont bien identifiés. Face à cette complexité, la littérature propose d'une part des outils d'optimisation exacte mais qui ne permettent généralement pas de résoudre des instances de très grande taille, soit des meta-heuristiques (en particulier en optimisation multiobjectif) qui permettent de fournir rapidement une solution approchée, sans toutefois pouvoir donner de garantie théorique sur la qualité de ces solutions.

Entre ces deux approches extrêmes, il existe une troisième voie bien connue en optimisation combinatoire qui consiste à relaxer la notion d'optimalité pour déterminer des solutions presque optimales en temps polynomial, autrement dit proposer des schémas d'approximations polynomiaux (ptas ou fptas). Si cette approche est largement utilisée en optimisation combinatoire elle n'a pas encore été appliquée de manière systématique aux problèmes d'optimisation impliquant les modèles de la théorie de la décision. Quelques résultats sont toutefois disponibles concernant l'approximation des solutions Pareto-optimales (e.g., Papadimitriou et Yannakakis, 2000; Diakonikolas et Yannakakis, 2010 ; Perny et Spanjaard, 2008 ; Guerreiro et al. 2023) ou concernant l'approximation des optima de Lorenz (Perny et al. 2013). Ces travaux pourraient éventuellement être exploités pour approximer des solutions optimales spécifiques associées à des préférences plus riches. D'autres résultats d'approximation pour la décision existent, par exemple (Angel et al., 2014) et (Herzel et al., 2021) pour une synthèse en décision multicritère, ou encore (Aissi et al., 2007) pour l'approximation de modèles de décision robuste de type minimax ou minimax regret, ou encore (Nguyen et Weng, 2017 ; Chassein et al. 2020) pour l'approximation par méthode primale-duale pour les OWAs.

Pour poursuivre et développer cette direction, un premier objectif sera d'étudier l'apport potentiel de méthodes d'optimisation approchées avec garanties de performance (Vazirani, 2001) pour différentes classes de modèles décisionnels, en particulier dans la famille des critères d'agrégation dépendants du rang (OWA, Gini, RDU, intégrale de Choquet) afin de pouvoir calculer efficacement des solutions presque optimales sur de grandes instances de problèmes combinatoires ou d'étudier le caractère approximable des problèmes posés. On pourra aussi envisager des approches exploitant la complexité paramétrique (Feldman et al., 2010) et des approches visant l'approximation efficace (Bourgeois et al., 2009). Un deuxième objectif sera de coupler de telles méthodes d'optimisation avec des techniques d'élicitation de préférences pour apprendre le modèle de décision en cours d'optimisation. La combinaison de méthodes d'élicitation avec des méthodes d'optimisation exactes a déjà montré son utilité pour la décision sur domaine combinatoire (Benabbou et Perny, 2018) mais une étude exploitant l'algorithmique de l'optimisation approchée avec garanties mérite d'être menée dans le même esprit.

## Références

- Aissi, H., Bazgan, C., & Vanderpooten, D. (2007). Approximation of min–max and min–max regret versions of some combinatorial optimization problems. *European Journal of Operational Research*, 179(2), 281-290.
- Angel, E., Bampis, E., & Gourvès, L. (2014). Polynomial Approximation for Multicriteria Combinatorial Optimization Problems. *Paradigms of Combinatorial Optimization: Problems and New Approaches*, 511-545.
- Benabbou, N., & Perny, P. (2018). Interactive resolution of multiobjective combinatorial optimization problems by incremental elicitation of criteria weights. *EURO journal on decision processes*, 6, 283-319.
- Bourgeois, Nicolas, Bruno Escoffier, and Vangelis Th Paschos. "Efficient approximation of combinatorial problems by moderately exponential algorithms." *Algorithms and Data Structures: 11th International Symposium, WADS 2009, Banff, Canada, August 21-23, 2009. Proceedings 11*. Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- Chassein, A., Goerigk, M., Kasperski, A., & Zieliński, P. (2020). Approximating combinatorial optimization problems with the OWA criterion. *European Journal of Operational Research*, 286(3), 828-838.
- Diakonikolas, I., & Yannakakis, M. (2010). Small approximate Pareto sets for biobjective shortest paths and other problems. *SIAM Journal on Computing*, 39(4), 1340-1371.
- Feldmann, Andreas Emil; Karthik C. S; Lee, Euiwoong; Manurangsi, Pasin (2020). "A Survey on Approximation in Parameterized Complexity: Hardness and Algorithms". *Algorithms*. 13 (6): 146.
- Guerreiro, A. P., Cortes, J., Vanderpooten, D., Bazgan, C., Lynce, I., Manquinho, V., & Figueira, J. R. (2023). Exact and approximate determination of the Pareto front using Minimal Correction Subsets. *Computers & Operations Research*, 106-153.
- Herzel, A., Ruzika, S., & Thielen, C. (2021). Approximation methods for multiobjective optimization problems: A survey. *INFORMS Journal on Computing*, 33(4), 1284-1299.
- Nguyen, V. H., & Weng, P. (2017). An efficient primal-dual algorithm for fair combinatorial optimization problems. In *Combinatorial Optimization and Applications: 11th International Conference, COCOA 2017, Shanghai, China, December 16-18, 2017, Proceedings, Part I 11* (pp. 324-339). Springer International Publishing.
- Papadimitriou, C. H., & Yannakakis, M. (2000, November). On the approximability of trade-offs and optimal access of web sources. In *Proceedings 41st annual symposium on foundations of computer science*, 86-92.
- Perny, Patrice, and Olivier Spanjaard. "Near admissible algorithms for multiobjective search." *ECAI 2008*. IOS Press, 2008. 490-494.
- Perny, P., Weng, P., Goldsmith, J., & Hanna, J. (2013). Approximation of Lorenz-optimal solutions in multiobjective Markov decision processes, *proceedings of UAI 2013*.
- Vazirani, V. V. (2001). *Approximation algorithms* (Vol. 1). Berlin: springer.