

# Algorithmes paramétrés efficaces pour le problème d'équilibrage d'une chaîne de montage et applications

Directeur de la thèse : Claire Hanen

Laboratoire et Equipe : LIP6, Recherche Opérationnelle (RO).

## 1 Descriptif du sujet

On considère le problème d'équilibrage d'une chaîne de montage (en anglais « Assembly line balancing problem ») qui est une classe particulière de problèmes d'ordonnancement. Un ensemble de tâches  $\mathcal{T}$  soumises à des contraintes de précédence exprimées sous la forme d'un graphe orienté sans circuit  $G = (\mathcal{T}, E)$ , doit être exécuté par une ligne de production. Il s'agit de répartir les tâches sur la ligne de production, de sorte à optimiser le débit et éventuellement d'autres fonctions de coût (énergie, puissance consommée, empreinte carbone, etc.).

A l'origine, la résolution de cette classe de problème est en lien direct avec l'optimisation des lignes de production. Plus récemment, il a été montré que l'optimisation de l'exécution d'un réseau de neurones sur une architecture pipeline est un problème d'« Assembly line balancing problem » [8], ce qui renouvelle l'enjeu de les résoudre efficacement, de manière exacte ou approchée, étant donné l'importance de ces applications.

Ces problèmes ont été identifiés dans les années 60, et ont été très étudiés [2]. Les problèmes de base sont  $\mathcal{NP}$ -difficiles [1], et de nombreux auteurs ont développé des algorithmes exacts et des heuristiques pour les résoudre avec des contraintes supplémentaires.

L'émergence, depuis le début des années 2000, de la complexité paramétrée [3] avec un nombre croissant de publications internationales sur ce thème a renouvelé la compréhension de la difficulté des problèmes d'optimisation combinatoire. Cette approche détermine des paramètres pertinents qui permettent de construire des algorithmes de complexité polynômiale lorsque la valeur du paramètre est fixée. Plus précisément la complexité d'un algorithme de complexité paramétrée est de la forme  $\mathcal{O}(f(p) \times P(n))$  où  $n$  est la taille de l'instance,  $p$  son paramètre,  $P$  une fonction polynôme et  $f$  une fonction quelconque. Un problème qu'on peut résoudre par un algorithme de complexité paramétrée est dit « Fixed-Parameter Tractable » (FPT) pour ce paramètre.

L'intérêt théorique de la complexité paramétrée pour sonder la complexité intrinsèque des problèmes combinatoires est évident. L'efficacité pratique des algorithmes qui en résultent demande à être travaillée, notamment dans le domaine de l'ordonnancement où peu d'algorithmes de complexité paramétrée ont été évalués expérimentalement [7, 9].

Plusieurs paramètres pertinents ont été identifiés pour étudier la complexité paramétrée de problèmes d'ordonnancement classiques avec contraintes de précédence sur une ou sur  $m$  machines. Par exemple, Claire Hanen et Alix Munier Kordon ont développé un algorithme FPT pour le problème d'ordonnancement de tâches dépendantes sur  $m$  machines avec fenêtres de temps. Les paramètres considérés sont le pathwidth, qui correspond au nombre maximal de fenêtres de temps qui s'intersectent en un instant [4] et la durée maximale d'une tâche. De même, Mallem et al. [6] étudient la complexité paramétrée de l'ordonnancement de tâches dépendantes de durée unitaire avec délais de précédence et fenêtres de temps. Les paramètres considérés sont le pathwidth et la valeur maximale d'un délai.

Le sujet de cette thèse porte sur l'étude de l'existence d'algorithmes paramétrés pour des problèmes

d'équilibrage de chaînes. A notre connaissance, il n'y a pour l'instant pas d'algorithme paramétré pour cette classe de problèmes. Cependant, la structure de la ligne de production est propice au développement de schéma de programmation dynamique pour résoudre exactement ces problèmes : ainsi, dans le cas d'un graphe de précédence sous la forme d'une chemin, Held et al. [5] ont développé en 1963 un premier algorithme de programmation dynamique de complexité polynomiale.

La question posée est la définition d'un ou plusieurs paramètres pertinents pour le développement d'algorithmes FPT dans le cas d'un graphe de précédence quelconque, ou pour des sous-classes de graphes pour lesquelles le problème est  $\mathcal{NP}$ -difficile. Il s'agit de caractériser des propriétés de dominance qui vont permettre, lorsque c'est possible, une énumération efficace en vue de définir un algorithme FPT pour les paramètres considérés. Dans la négative, il s'agira de classer le problème dans les hiérarchies de la complexité paramétrée. On tâchera donc de caractériser la frontière entre problème FPT et problèmes plus complexes. La thèse pourra également évaluer expérimentalement les algorithmes proposés en s'appuyant sur des données de la littérature et celles rassemblées dans la thèse [8] pour l'application à l'exécution de réseaux de neurones. L'étude et l'existence d'algorithmes approchés de complexité paramétrée est également envisagé en fonction des résultats obtenus.

## 2 Profil du candidat et conditions de la thèse

Le candidat devra avoir de bonnes connaissances en algorithmique et en programmation. Des notions de base en théorie de la complexité, et/ou en recherche opérationnelle sont vivement recommandées.

La thèse doit se dérouler à partir de la rentrée 2024 au LIP6, 4 place Jussieu, 75252 Paris.

## Références

- [1] Eduardo Álvarez-Miranda and Jordi Pereira. On the complexity of assembly line balancing problems. *Computers & Operations Research*, 108 :182–186, 2019.
- [2] Nils Boysen, Philipp Schulze, and Armin Scholl. Assembly line balancing : What happened in the last fifteen years? *European Journal of Operational Research*, 301(3) :797–814, 2022.
- [3] Marek Cygan, Fedor V. Fomin, Lukasz Kowalik, Daniel Lokshtanov, Daniel Marx, Marcin Pilipczuk, Michal Pilipczuk, and Saket Saurabh. *Parameterized Algorithms*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1st edition, 2015.
- [4] Claire Hanen and Alix Munier Kordon. Fixed-parameter tractability of scheduling dependent typed tasks subject to release times and deadlines. *Journal of Scheduling*, 2023.
- [5] Michael Held, Richard M Karp, and Richard Shareshian. Assembly-line balancing—dynamic programming with precedence constraints. *Operations research*, 11(3) :442–459, 1963.
- [6] Maher Mallem, Claire Hanen, and Alix Munier Kordon. Parameterized complexity of a parallel machine scheduling problem. In *17th International Symposium on Parameterized and Exact Computation, IPEC 2022, September 7-9, 2022, Potsdam, Germany*, pages 21 :1–21 :21, 2022.
- [7] Matthias Mnich and René van Bevern. Parameterized complexity of machine scheduling : 15 open problems. *Computers and Operations Research*, 100 :254 – 261, 2018.
- [8] Ali Oudrhiri. *Performance d'une architecture d'accélérateur de réseau neuronal et son optimisation à l'aide d'une approche basée sur un pipeline*. PhD thesis, Sorbonne Université, 2023.

- [9] Istenç Tarhan, Jacques Carlier, Claire Hanen, Antoine Jouglet, and Alix Munier Kordon. Parameterized analysis of a dynamic programming algorithm for a parallel machine scheduling problem. In *Euro-Par 2023*, volume 14100 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 139–153. Springer, 2023.